

## Flotte Kurven - Ein Mathe-Spiel für den Analysisunterricht

Spiele für den Mathematikunterricht sind mittlerweile viele zu finden, für die Oberstufe allerdings gibt es kaum welche. Das haben wir zum Anlass genommen, selber ein Spiel zu erfinden. Die mathematische Grundlage unseres Spiels ist die bekannte Idee des graphischen Differenzierens und Integrierens<sup>1</sup>. In einer vereinfachten Variante kann man sich auch auf das Differenzieren beschränken. Das Spiel durchlief mehrere Entwicklungsstufen. Immer wieder sind wir in Schulen gegangen, um in Mathematikkursen der Oberstufe die bis dahin aktuelle Version zu testen und kritisieren zu lassen. Die Tests haben gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler durchaus Spaß an Mathematik haben können.

### Worum geht es in „Flotte Kurven“? Welche Voraussetzungen müssen die Schülerinnen und Schüler mitbringen?

In dem Spiel geht es darum, Graphen von Funktionen, zugehörigen Ableitungs- und Stammfunktionen einander zuzuordnen. Doch nur wer schnell reagiert, kann gewinnen. Fachliche Voraussetzung bei den Spielerinnen und Spielern sind die Grundvorstellungen „lokale Änderungsrate“ (bzw. die Ausprägung „Tangentensteigung“) vom Ableiten und „Flächenvorstellung“ vom Integrieren. Dies war in allen Testlerngruppen (Grund- und Leistungskurse) der Fall.

### Wie geht das Spiel?

„Flotte Kurven“ besteht aus drei Kartensätzen. Die einzelnen Sätze zeigen Graphen von Funktionen (f-Karten), von den zugehörigen Ableitungsfunktionen (f'-Karten) und den Stammfunktionen (F-Karten). Die f-Karten liegen verdeckt auf dem Tisch. Die Spielerinnen und Spieler halten einige der f'- und F-Karten auf der Hand. Eine f-Karte wird aufgedeckt, und die Spielerinnen und Spieler müssen schnell überprüfen, ob sie eine zugehörige f'- oder F-Karte haben, um diese dann flott abzulegen. Die zuerst abgelegte Karte darf liegen bleiben, die anderen Spielerinnen und Spieler müssen ihre Karten wieder aufnehmen. Wer zuerst ablegen konnte, erhält einen Siegpunkt. Der Reihe nach dürfen nun die Spielerinnen und Spieler je ein Argument dafür bringen, dass die abgelegte Karte zu der f-Karte passt bzw. nicht passt, bis keiner mehr ein Argument weiß. Für jedes in der Spielrunde akzeptierte Argument gibt es einen Siegpunkt. Sollten die Argumente belegen, dass die abgelegte Karte nicht passt, muss die Spielerin bzw. der Spieler diese wieder aufnehmen und den gewonnenen und einen weiteren Siegpunkt abgeben. Dann wird eine weitere f-Karte aufgedeckt. Aktionskarten bringen zusätzliche Abwechslung ins Spiel.

Jede neue Version des Spiels haben wir in einem „neuen“ Kurs getestet. In jedem Kurs durften wir eine Doppelstunde verbringen. Nachdem wir uns den Schülerinnen und Schülern vorgestellt hatten, führten wir mit ihnen anhand von Spielkarten (auf Folien kopiert) ein kurzes Unterrichtsgespräch mit dem Zweck, die Grundvorstellungen „Tangentensteigung“ und „Flächenvorstellung“ in Erinnerung zu rufen.

---

<sup>1</sup> z.B.: Blum, W. / Kirsch A.: „Die beiden Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung“; mathematik lehren 78; 1996; oder: Breuker, U.: „Was heißt denn hier anschaulich?...“; MNU 44/5; 1991; S. 274 - 284; oder: Kirsch, A.: „Ein geometrischer Zugang zu den Grundbegriffen der Differentialrechnung“; MU 6; 2/1960; oder: Kirsch, A.: „Der Hauptsatz - anschaulich?“; in: mathematik lehren 78/1996; oder: Schornstein, J.: „Graphisches Ableiten und Integrieren“; in: Mathematik in der Schule 3/1993

Dafür benötigten wir jeweils ca. 5 Minuten. Zumeist brauchten die Schülerinnen und Schüler weitere 5 Minuten, um die eigentliche Spielanleitung zu lesen und zu verstehen. Nach insgesamt ca. 15 Minuten begannen sie zu spielen.

### **Mathe-Spiel – geht das überhaupt?**

Ein Spiel muss spannend sein. Bei „Flotte Kurven“ soll dafür eine gute Mischung aus Zufall (Welche Karte wird als nächstes aufgedeckt?) und Können (Erkenne ich eine passende Karte?) sorgen. Zudem halten Aktionskarten Überraschungen bereit. Die geforderte flotte Reaktion und der Wettbewerbscharakter erhöhen die Spannung.

Was man sich für den Unterricht schon immer gewünscht hat, wird durch „Flotte Kurven“ verwirklicht: Alle Schülerinnen und Schüler sind ständig aktiv: Zunächst muss man überlegen, ob man eine Karte ablegen kann, dann können alle Spielerinnen und Spieler der Reihe nach argumentieren, ob die abgelegte Karte zu der aufgedeckten f-Karte passt, oder nicht. Über das eigentliche Kartenspiel hinaus sind eben Begründungen von Bedeutung. In jeder Spielrunde können alle Spielenden Gewinnpunkte sammeln und daher kleine Erfolgserlebnisse erfahren.

Wichtig ist auch die soziale Komponente: Bei „Flotte Kurven“ gibt es keinen Schiedsrichter (schon gar nicht die Lehrperson), oder anders gesagt: alle Spielenden sind zugleich Schiedsrichter. Die Spielenden müssen sich gegenseitig von der Richtigkeit ihrer Begründungen überzeugen und gemeinsam entscheiden.

Als Lernspiel bedeutet „Flotte Kurven“ eine motivierende Abwechslung für den üblichen Mathematikunterricht. Nach unseren Versuchen in Schulen glauben wir, mit „Flotte Kurven“ ein Spiel entwickelt zu haben, das nicht nur den Kursbesten Spaß macht. „Flotte Kurven“ vereinigt einige typische Vorteile von Lernspielen: SchülerInnen-Zentrierung, erhöhte Motivation und Spaß, Förderung sozialen Verhaltens und vielleicht auch Abbau von Ängsten und Blockaden. Zudem können auch schwächere Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht mal gewinnen.

Nicht zu vernachlässigen ist der praktische Aspekt: Als Kartenspiel benötigt „Flotte Kurven“ nicht viel Platz in der Tasche der Lehrerin oder des Lehrers und hat ein leicht verständliches und nicht zu umfangreiches Regelwerk.

Die Testphasen haben gezeigt, dass „Flotte Kurven“ Schülerinnen und Schüler die 5-Minuten-Pause vergessen lassen kann. Das spricht für eine Motivation, die dem Spiel eigen ist und nicht nur mit dem Ausbruch aus dem üblichen Unterrichtsablauf begründet werden kann. Dieses zeigt sich besonders deutlich in dem Schüler-Ausspruch „Oh geil, wolln wir noch mal spielen?“.

### **„Mathematischer Nährwert“**

Grundvorstellungen vom Ableiten und Integrieren: Es gibt Befragungen von Menschen, deren Abitur ca. 5 Jahren zurückliegt, in denen gefragt wird, was sie mit den Begriffen „Ableiten“ oder „Differenzieren“ verbinden. Nicht unüblich sind Antworten wie „Das war das mit dem Strich, f.“ oder „Man mußte eine Kurvendiskussion machen.“ Es wurden Schreibformen, abzuarbeitende Algorithmen u.ä. erinnert, aber nicht die Bedeutung des Ableitens. Im Zeitalter der Computer-Algebra-Systeme aber verliert der Kalkül an Bedeutung. Die für die Modellbildung bei anwendungsorientierten Aufgaben notwendigen Grundvorstellungen dagegen gewinnen an Bedeutung. Grundvorstellungen können helfen, neue mathematische Begriffe zu erlernen und diese im Folgenden ständig zu vertiefen. Mit „Flotte Kurven“ können die Grundvor-

stellungen aufgebaut, wiederholt und vertieft werden. Die in dem Spiel genutzte Idee des graphischen Differenzierens und Integrierens ist nicht neu und wird auch in Schulbüchern (z.B. „Elemente der Mathematik 11. Schuljahr Nordrhein-Westfalen“<sup>2</sup>) vorgestellt und angewendet. In diesem Schulbuch wird es vor der formalen Behandlung des Differenzenkalküls zum Aufbau der Tangentensteigungsvorstellung plziert.

*Anmerkung:* Das Bestimmen der Steigung eines Graphen in einem Punkt mithilfe einer Zeichnung heißt *zeichnerisches Differenzieren*.

**b)** Gegeben ist der Graph einer Funktion. Bestimme durch zeichnerisches Differenzieren die Tangentensteigungen. Trage die erhaltenen Werte in ein darunter gezeichnetes Koordinatensystem als Ordinaten ein. Verwende dabei zunächst markante Punkte des Graphen: *Hochpunkte*, *Tiefpunkte*, *Wendepunkte*, *Sattelpunkte*. In den Wendepunkten ändert sich das „Krümmungsverhalten“. Verbinde die erhaltenen Punkte durch eine Kurve. Sie heißt *Tangentensteigungskurve* oder auch *Ableitungskurve*. (Sie stimmt mit dem Graphen der Ableitungsfunktion von Seite 165 überein.)

Diese Aufgabe stammt aus: Heinz Griesel, Helmut Postel: „Elemente der Mathematik 11. Schuljahr Nordrhein-Westfalen“; Schroedel Verlag, Hannover 1999; S. 148

Selbstkontrolle bei Anwendungen: Gefestigte Grundvorstellungen können der Selbstkontrolle bei der Bearbeitung anwendungsorientierter Aufgaben dienen, indem sie bei der weiteren Nutzung der zugehörigen Kalküle die Möglichkeit bieten, die aktuelle Situation auf Sinnhaftigkeit zu überprüfen. (Kann das, was ich mache, überhaupt richtig sein?)

Ableitungsregeln plausibel machen: Eine gut ausgeprägte Grundvorstellung vom Ableiten kann helfen, Ableitungsregeln plausibel zu machen. Das gilt z.B. für die Summenregel und die Regel für konstante Faktoren. Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler z.B. überprüfen, ob „der Graph von  $a \cdot f'$  überhaupt zu dem von  $a \cdot f$  passen kann“. Entsprechend können sie bei z.B. der Produktregel erkennen, dass die Ableitungsfunktion von  $f \cdot g$  nicht  $f' \cdot g'$  sein kann.

Natürlich helfen die beiden Grundvorstellungen des Differenzierens auch, Einsicht zu gewinnen, dass die sogenannte „notwendige Bedingung für ein lokales Extremum“  $f'(x) = 0$  heißt, und sie zeigen z.B. anhand von Sattelpunkten, warum sie nicht hinreichend ist.

„der konstante Summand c“ beim Integrieren: Nicht nur einmal waren Schülerinnen und Schüler in der Testphase erstaunt, dass die Graphen der Stammfunktionen am linken Rand der Spielkarte ( $x = -4$ ) nicht bei  $y = 0$ , sondern durchaus auch im positiven oder negativen  $y$ -Bereich begannen. Letztlich stellt man hier die Frage nach dem Anfangswert bei einer Differentialgleichung. Weil ein ehrliches Interesse an die-

<sup>2</sup> Heinz Griesel, Helmut Postel: „Elemente der Mathematik 11. Schuljahr Nordrhein-Westfalen“; Schroedel Verlag, Hannover 1999; S. 148

ser Frage bestand, nahmen die Lehrerinnen und Lehrer diese Frage in den folgenden Stunden wieder auf.

Der Hauptsatz anschaulich: Die Grundvorstellungen der Tangentensteigung und des Flächeninhalts können genutzt werden, um einen aus Schülersicht anschaulichen Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zu führen, wie es z.B. Ulrich Breuker vorschlägt<sup>3</sup>. Der Beweis verläuft in zwei Schritten, einer qualitativen und einer quantitativen Betrachtung. Die Begründungen, zu denen die Schülerinnen und Schüler in diesem Spiel angeregt werden, stellen die Basis für den qualitativen Teil des Beweises dar.

Sprachkompetenz: Diese Diskussion der Argumente fordert von den Schülerinnen und Schüler einen präzisen Sprachgebrauch, kann also die Sprachkompetenz der Schülerinnen fördern.

### **Erfahrungen aus der Testphase**

In den Testphasen haben wir die Schülerinnen und Schüler ca. 45 Minuten spielen lassen. In dieser Zeit hatten die einzelnen Gruppen zwischen einer und drei Runden gespielt. In den verbleibenden 30 Minuten haben wir die Schülerinnen und Schüler gebeten, Kommentare, Kritik und Anregungen zu dem Spiel aufzuschreiben. Wir haben uns gefreut, wie intensiv und ernsthaft sie das Spiel auf ihre eigene Situation und Position im Mathematikunterricht reflektiert haben:

- „Das Spiel ist eine gute Übung, um Graphen einschätzen zu lernen. Es sollte öfter im Unterricht gespielt werden. Vielleicht könnte man auch noch Funktionsterme aufschreiben und die dazu passenden Graphen finden.“
- „Gute Übung zur Vorstellung von Graphen von Ableitungen => besseres Vorstellungsvermögen, evtl. auch in Klausuren.“
- „Das Spiel ist eigentlich ganz gut. Man kann das, was man im Unterricht gelernt hat noch einmal verinnerlichen und eventuell auftretende Fragen in der Gruppe klären.“
- „Man lernt, genau hinzuschauen (auf bestimmte Sachen zu achten) => plausibel begründen;“
- „Man kommt schnell durcheinander mit  $F$  und  $f'$ ; keine schlechte Idee zu so einem schweren Thema“
- „Das Spiel trainiert gut. Es macht auf Probleme aufmerksam, die sonst im Unterricht unter den Tisch fallen, bzw. wieder vergessen werden.“
- „Man braucht viel Übung, um die Graphen zuordnen zu können. Erst nach einiger Zeit geht es schneller und macht Spaß.“
- „Gut zur Übung des Bildes des Graphen, so dass man nicht nur rechnet, sondern auch weiß, wie die Graphen aussehen und  $F$ ,  $f'$  und  $f$  zusammenhängen.“

---

<sup>3</sup> Breuker, Ulrich: „Was heißt denn hier anschaulich?...“; MNU 44/5; 1991; S. 274 - 284